



## Aplicaciones de programación dinámica en problemas de inventario: Un estudio de la literatura.

TCL. (IPM) Carlos Gómez Ortiz, Ingeniero en Sistemas de Armas, mención Química. MSc en Military Operational Research de la Cranfield University, Magister en Formulación, Evaluación y Gestión de Proyectos Privados, Sociales y de Defensa de la ACAPOMIL.

### Resumen



El presente artículo tiene por objeto dar a conocer un compilado de la literatura existente referido al uso de programación dinámica en problemas de inventario.

Primero, se explicará el origen de cada herramienta y la forma en que se incorporaron en los problemas actuales. Para esto, se seguirá un orden cronológico de las publicaciones de varios autores y el detalle de sus respectivos trabajos.

### Abstract

This article aims to present a resume of the literature regarding to the use of dynamic programming in inventory problems.

Por último, el autor establecerá algunas observaciones generales, conclusiones y referencias obtenidas en este estudio y las referencias detalladas sobre los que se basó este trabajo.

### Palabras clave

Gestión de inventarios, problemas de inventario, programación dinámica, optimización.

### Aplicaciones de programación dinámica en problemas de inventario

### Introducción

Desde que la programación dinámica (PD) fue desarrollada, se ha utilizado en diferentes y variados tipos de problemas como problemas de inventario y problemas de fiabilidad.<sup>1</sup>

Los primeros esfuerzos, lejos de la matemática y cercano a una natural duda humana, fueron enfocados a encontrar el origen del nombre. Así, buscando en los orígenes de la misma, finalmente, se encontró el creador de la PD y los motivos que lo impulsaron. Lo anterior en un enfoque claro e inesperadamente humano, dado que estamos hablando de un complejo algoritmo matemático.

El objetivo de este estudio es presentar una secuencia actualizada de las publicaciones e investigaciones realizadas en una de las áreas mencionadas anteriormente, la administración de inventarios utilizando PD.

Citemos, literalmente, las palabras expresadas por el desarrollador creativo del método PD escrito en su autobiografía y cómo creó el nombre que todavía está en uso.

Esto tendrá en cuenta una breve explicación del origen de ambos (la administración de inventarios y la PD) por separado y como éstos se relacionaron.

*“La década de 1950 no fueron buenos años para la investigación matemática. Tuvimos un caballero muy interesante en Washington*



*llamado Wilson. Fue secretario de Defensa, y de hecho tenía un miedo patológico y odio a la palabra investigación. No estoy usando el término a la ligera; lo estoy usando con precisión. Su rostro cambiaba, se volvía rojo, y se ponía violento si las personas utilizaban el término investigación en su presencia. Usted puede imaginar cómo se sentía, sobre el término matemático. La RAND Corporation fue utilizada por la Fuerza Aérea, la cual tenía a Wilson como su jefe. Por lo tanto, yo sentí que tenía que hacer algo para proteger a Wilson y la Fuerza Aérea del hecho que yo estaba haciendo en realidad matemáticas dentro de la RAND Corporation. ¿Qué título?, ¿qué nombre podía elegir?. En primer lugar yo estuve interesado en planificación, en toma de decisiones, en pensamiento. Pero planificación, no es una buena palabra por varias razones. Por lo tanto decidí utilizar la palabra programación. Además, quería transmitir la idea que esto era dinámico, es decir con múltiples etapas y que era variable en el tiempo. Pensé, vamos a matar dos pájaros de un tiro. Tomemos una palabra que tiene un significado absolutamente preciso, dinámico, en el sentido físico clásico. También tiene una propiedad muy interesante como un adjetivo, y que es que es imposible usar la palabra dinámico en un sentido peyorativo. Trate de pensar en alguna combinación para darle un sentido peyorativo, es imposible. Por lo tanto, pensé que programación dinámica era un buen nombre. Era algo que ni siquiera un congresista podría objetar. Así que lo usé como un paraguas para mis actividades.”<sup>2</sup>*

De ahí el nombre de la PD, ahora a indagar el origen de la gestión de inventarios (GI). Originalmente, se señala que la GI fue iniciada por FW Harris en el año 1913, cuando desarrolló la fórmula de la cantidad económica

de pedido (CEP). No obstante, el desarrollo formal de la GI se lo designan a RH Wilson dado que fue él quien exploró con más dedicación su aplicación y usos en su artículo publicado en 1934.<sup>3</sup> En este documento, los costos variables totales se reducen al mínimo, mediante la definición de la cantidad óptima ordenada.

Fundiendo ambas vertientes, fue Bellman en su libro de 1957,<sup>4</sup> quien dedica un capítulo entero a introducir las relaciones y aplicaciones de la PD en la GI. Aquí se presenta la formulación de un proceso de toma de decisiones dado un futuro incierto. En este, se propone inicialmente una demanda desconocida y un costo de pedido fijo, como base, y variable según la cantidad ordenada. También introduce algunas sanciones cuando la demanda es mayor que la oferta, para incentivar a los gerentes a pedir una cantidad óptima. En sus palabras, “*simplemente, queremos determinar la política de ordenamiento en cada etapa que permitirá minimizar alguna función promedio del costo total del proceso*”.<sup>5</sup> El mismo elemento que el autor menciona, se encuentra en la mayoría de los actuales libros de programación dinámica y describen la relación de problemas de PD y GI, como lo demuestra DK Smith en su libro “Programación Dinámica: una introducción práctica” impreso en 1991.<sup>6</sup>

Casi al mismo tiempo de la publicación de Bellman, aparece otro enfoque que generaliza la CEP para una demanda variable durante el tiempo, llamado método de tamaño dinámico del lote. Este, da una nueva relación entre PD y GI que cubre un área mencionada por Bellman, pero no aborda en profundidad como “*las características comunes de estos modelos es el supuesto que el costo de hacer el pedido inicial, es directamente*



*proporcional a la cantidad ordenada. La adición de costos fijos de administración (costo a "la burocracia"), cambia la naturaleza del lote óptimo de manera esencial ... entramos en un territorio donde las cosas son mucho más duras, donde consideramos el caso en que el costo sanción incluye un término "burocracia", que es independiente de la cantidad ordenada",<sup>7</sup> visualizando los costos fijos y variables mencionados anteriormente. Este modelo publicado en 1958<sup>8</sup> es ampliamente conocido hoy como el método de Wagner-Whitin. Este es, hoy en día, utilizado frecuentemente en cursos introductorios de PD. Suponiendo que la demanda es conocida por cada período y que hay un costo variable de reordenamiento y almacenamiento, ellos fueron capaces de establecer que para una función de costos convexa (solo un óptimo), la política óptima de pedido era hacer un pedido para satisfacer una cierta cantidad de períodos y reordenar solo cuando el inventario alcanza el nivel cero. Con esto, fueron capaces de formular este problema como una PD e identificar, siguiendo una secuencia de ruta más corta, cuál es la cantidad de pedidos óptima que satisface las restricciones dadas.*

Algunos años más tarde Wagner, pero esta vez en compañía de Veinott, publicó en 1965,<sup>9</sup> así como Iglehart en 1963,<sup>10</sup> una extensión para el modelo anterior, pero de una manera estocástica, que considera costos fijos de reordenamiento. Ambos se diferencian en su presunción realizada para la demanda. El primero de ellos supone que sea discreta, mientras que el segundo considera la demanda que se distribuirá de forma continua. En términos de costos, asumieron que el almacenamiento y la reserva de elementos son lineales y que hay un cargo fijo administrativo por pedido.

El método de PD se utiliza universalmente en diferentes áreas, ya que solo cambiando correctamente algunos parámetros y realizando acertadas suposiciones se ajusta a la mayoría de las áreas. Algunas de ellas serán comentadas, enfocándonos claramente en problemas de GI. Normalmente, el desafío no está representado por la formulación del problema, sino que su resolución. Por esto se utilizan variados métodos que reducen el área factible, para lograr un resultado cercano al óptimo. Estos métodos heurísticos son desarrollados para cada caso particular y mediante el ajuste de los diferentes parámetros, se pueden obtener resultados lógicos, pero no se pueden expresar analíticamente.

En este punto, la iteración de la política de abastecimiento se utiliza ampliamente desde la publicación de Howard<sup>11</sup> en 1960. Este, en vez de resolver directamente un problema de PD, utilizaba una política de abastecimiento "adivinada". Mediante el uso de la recurrencia de la PD, esta suposición es evaluada en función del objetivo, para observar si esta política de producción es una mejora de la conjetura anterior o no. Si mejora, se vuelve a evaluar una mejora en esta política de abastecimiento y la secuencia se repite hasta que se alcanza el óptimo. Este proceso iterativo es muy rápido cuando la política inicial de partida está cerca de la óptima, la que se podría obtener con una búsqueda intuitiva o utilizando métodos heurísticos.

Para obtener una visión de la evolución de la modelación de inventarios dinámicos, es útil lo publicado por Girlich y Chikan.<sup>12</sup> Ellos entregaron una reseña histórica de la relación de las matemáticas aplicadas y la GI dado una variedad de diferentes puntos de vista como enfoque estadístico, probabilístico y



económico para la problemática del almacenamiento. También introducen al lector, en la teoría de decisiones para problemas estocásticos como el proceso de decisión de Markov.

A continuación, se comentará brevemente sobre variados papers, y su correspondiente autor, los que han presentado diferentes enfoques para problemas de GI utilizando PD, de las últimas décadas.

Como se ha comentado anteriormente, lo complejo de la PD es la resolución matemática. Debido a esto, se han desarrollado algunas aproximaciones, así como creaciones híbridas de PD con otros métodos. Siguiendo esta idea, en 1998, se presentó un problema de toma de decisiones secuenciales bajo incertidumbre por Van Roy, Bertsekas, Lee & Tsitsiklis.<sup>13</sup> En este trabajo se enfrentaron a un problema típico del retail, al abastecerse y determinar la locación del inventario en los almacenes y tiendas, con el fin de satisfacer las demandas del cliente y reducir al mínimo los costos de almacenamiento y transporte.<sup>14</sup> Aquí, se introducen técnicas de redes neuronales para obtener una aproximación del óptimo para una formulación de PD, en problemas de gestión del retail. Ellos emplearon el suficiente tiempo para realizar pruebas y ensayos, como para poder ajustar los diferentes parámetros utilizados en esta programación neuro-dinámica (PND). Con esta mezcla de técnicas, que utilizan los beneficios de ambos métodos, se logró reducir los requerimientos informáticos requeridos para la solución convencional de una PD. Partiendo de un problema con una tienda y un almacén, con solo 3 variables de estado, lograron evolucionar a un sistema de inventarios que incluía un fabricante (*manufactured goods*) con capacidad de

suministrar a los almacenes (*warehouse*), a las tiendas (*stores*) y en casos particulares, también a los demandantes (*customer demands*). Lo anterior, ante la escasez del inventario en una tienda y que el cliente, con cierta probabilidad, está dispuesto a esperar un tiempo más largo por una entrega directa desde el almacén o del fabricante. La estructura de costos consideró un costo de almacenamiento, con diferentes costos para cada posición, un costo por escasez (asociado a un cliente perdido por no ser satisfecho) y el costo de transporte asociado con la entrega especial. La idea era reducir al mínimo los costes de almacenamiento y transporte asociados a cada tienda, el almacén y entre ellos. Todo esto, suponiendo una demanda independiente e idénticamente distribuida para cada almacén, generado a partir de una distribución normal.

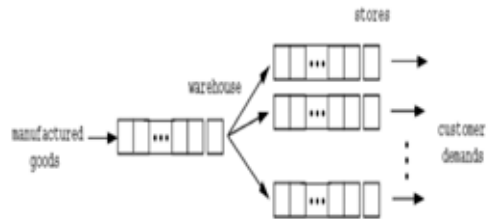


Figura N° 1: “Los buffers del sistema de inventario para minorista de Van Roy, Bertsekas, Lee & Tsitsiklis”.<sup>15</sup>

Como su modelo implica un sistema dinámico, que cambia en un tiempo discreto, cada etapa estuvo representada por *buffers* en la que los elementos se encuentran en un momento determinado. Se realizaba un paso diario que generaba el movimiento del sistema. Para cada etapa, los *buffers* de la izquierda, representan el retardo de la etapa anterior y los *buffers* de la derecha, representan cuando el elemento está listo para ser entregado. Por supuesto, se consideraron algunas restricciones como



el espacio existente en cada etapa y que la demanda no puede exceder la capacidad de producción. El movimiento descrito para el sistema, está representado en la figura N° 1, donde el desplazamiento sigue la flecha desde el fabricante hasta los clientes, a través del sistema. Una vez que el modelo fue descrito, se definieron los parámetros del sistema a ser representado. Estos son:<sup>16</sup>

1. Número de tiendas.
2. Retraso de tiendas.
3. Retardo de almacén.
4. Capacidad de producción.
5. Capacidad de la bodega.
6. Capacidad de la tienda.
7. Probabilidad de espera del cliente.
8. Costo de entrega especial.
9. Costo de almacenamiento en bodega.
10. Costo de almacenamiento en tienda.
11. Demanda promedio.
12. Desviación estándar de la demanda.
13. Costo de la falta de inventario.
14. Escasez.

Finalmente, detallaron su formulación de PD, PND y la política de abastecimiento a iterar, basados en los elementos comentados anteriormente, y presentaron los resultados obtenidos por dos estudios de caso realizados con su formulación PND, para valores particulares para cada parámetro.

Más tarde Buchanan y Abad<sup>17</sup> introdujeron en 1997 un sistema en el que el inventario también podía ser devuelto o reciclado por los clientes. Lo anterior, asignándole una fracción aleatoria del total de elementos del inventario que se encontraban circulando. Para lo anterior, asumieron que el tiempo de retardo del pedido y el costo de reaprovisionamiento era de cero (dado que existía reserva, por lo que ninguna

venta se perdía), se asignó un costo de almacenamiento para los elementos acumulados, de un período al siguiente, y que el inventario disponible en los almacenes de reciclaje, eran revisadas periódicamente. A partir de un sistema con un único período, evolucionaron a un sistema con N-períodos y, una política óptima de abastecimiento, se obtiene usando programación dinámica estocástica.

Una visión diferente para estos problemas de GI fue presentado en 2002 en un artículo publicado por Kleywegt, Nori y Savelsbergh.<sup>18</sup> A diferencia del caso en el que cada cliente cuida de su inventario, en este trabajo el problema está desde el punto de vista de un vendedor, que monitorea el inventario de sus clientes y decide cuándo y cuánto inventario le debe suministrar o reponer. Por lo que es el vendedor, quien necesita minimizar los costos asociados a la reposición de los stocks de sus clientes. La idea de esta variación fue representar los beneficios obtenidos por ambos -clientes y proveedores- mediante la adopción de este sistema de administración del inventario desde la mirada del vendedor. Al asumir un inventario de un tipo de elemento, sin reservas, una distribución de la demanda del cliente conocido, varios vehículos, un solo proveedor y varios clientes, fueron capaces de formular el problema como un proceso de decisión de Markov y proponer una programación dinámica aproximada (PDA). Este problema de enrutamiento de inventario fue diseñado para manejar múltiples entregas por viaje y el acercamiento a la solución, se obtiene dividiendo el problema general en pequeños sub problemas, para aproximarse al óptimo. En un extenso documento, ellos detallan todos los pasos realizados para conseguir



la formulación de este problema y cómo se hizo la aproximación.

Una mirada interesante para un problema de inventario bancario fue realizado por Nair y Anderson<sup>19</sup> en 2005. Lo novedoso de su planteamiento es que consideraron las reservas federales de los EE.UU. como inventario de un banco minorista. *“La gestión de estos depósitos es un problema de inventario importante y complejo, por dos razones. En primer lugar, las regulaciones de la Reserva Federal requieren que las instituciones depositarias mantengan ciertas cantidades para satisfacer los requerimientos de reservas legales contra las cuentas de los clientes (depósitos a la vista y otros ahorros). En segundo lugar, deben poseer el inventario esencial para operar en sus líneas principales de negocio: servicios de pago, las transferencias bancarias, préstamos, entre otros»*.<sup>20</sup> El objetivo de este minorista es reducir al mínimo los fondos que tienen que ser depositados en la Reserva Federal, ya que no pagan interés para ellos. En su lugar, es mejor para los bancos gestionar esos fondos, a objeto de ganar intereses. El problema se origina en que los bancos podían transferir sus fondos en dos tipos de cuentas, una de ellas que requiere un 10% de la reserva y la otra, no requiere reserva en lo absoluto. Para gestionar estas transferencias, en 1994, los bancos minoristas introdujeron una herramienta denominada “programa de barrido de depósitos para minoristas” para gestionar el inventario de fondos, dando cumplimiento a la restricción de un máximo de 6 retiros que se puede hacer anualmente. En este trabajo, se presentan dos algoritmos de programación dinámica estocástica, utilizados para operar el citado programa dentro de las regulaciones federales y minimizar

los fondos estériles (sin intereses) en los bancos federales.

Por otra parte, cuando existe ambiente difuso como parte de un problema de PD, se origina la programación dinámica difusa. En esta área, en 2004, Abo-Sinna<sup>21</sup> realizó un compilado. En este estudio se abordó la PD multiobjetivo y cómo el concepto de un entorno difuso, se ha introducido y desarrollado en los últimos años. En el mismo orden de ideas -un par de años después- Geetharamani, Thangavel, Karnan y Elango<sup>22</sup> presentan un estudio de caso sobre GI con este enfoque. En este, se analiza un problema de inventario de elementos perecibles, introduciendo variables difusas, a una función objetivo difusa (como consecuencia de un entorno incierto), suponiendo que no hay reservas dado que los elementos son perecederos. La idea es reducir al mínimo el inventario disponible al final del horizonte de planificación. Para ello, se presenta la formulación y se detalla un ejemplo numérico de 4 períodos, con las etapas y las tablas correspondientes de la PD clásica, asumiendo una demanda fija para cada período.

Para los casos en que la demanda es estocástica y sensible al precio, siendo el precio óptimo y la política de inventario de características dinámicas, Chen, Ray & Song<sup>23</sup> publicaron un documento que pretende presentar la formulación de PD, basados en varios supuestos generales que van a ser comentados. Este problema de inventario asume un único elemento, una demanda insatisfecha (sin reserva), gastos de almacenamiento, gastos por acumular inventario de un período al siguiente, costos por escasez y costo de abastecimiento, con una componente fija y variable. El administrador tiene oportunidad





de, al término de cada período, revisar el inventario y de acuerdo con eso, decidir si emitir una orden y de qué tamaño. En un horizonte de venta finito, el objetivo es maximizar las ganancias del distribuidor minorista, mediante la manipulación de sus dos variables disponibles: el precio y el nivel de inventario. Los autores, presentaron un interesante enfoque matemático, con un detallado gráfico en el cual apoyan sus resultados.

Otra problemática que ha venido afectando a la gestión de inventario, es la incorporación del mercado electrónico. Este da una gran flexibilidad, tanto para el vendedor como para el cliente, generando un comercio en línea e incluso subastas como las de páginas web ampliamente conocidas como eBay o Amazon. Pero esta flexibilidad incorpora una nueva variable a ser controlada por el administrador de inventario. Esta situación de control de inventario fue propuesta por Lee, Lee & Bao.<sup>24</sup> Ellos, al introducir el mercado electrónico a su modelo, asumieron que los elementos del inventario podían ser adquiridos (aun cuando no hubiera inventario) o vendidos, directamente a través del mercado electrónico. Por lo que asumieron, que esta forma les significaba tener un menor tiempo de retraso en la entrega, pero a un costo de abastecimiento mayor que de una forma tradicional. Ellos fueron capaces de formular dicha situación y resolver la PD, para un plazo de retraso de hasta un período por parte de un proveedor, con una adecuada política de control de inventario.

Pero cuando el tiempo de espera es mayor a un período, debido a la complejidad matemática que esto genera, solo se puede identificar un óptimo aproximado, utilizando métodos heurísticos. Es por esto que las

aproximaciones propuestas por los autores, fueron una política de abastecimiento continua del tipo *order-up-to*, un tamaño constante de pedido para todos los períodos o mediante la resolución de un problema de minimización de costos para cada período, para fijar el tamaño del siguiente período, convirtiéndose en una orden dependiente del período de tiempo. Estas tres heurísticas fueron evaluadas y comparadas en cada política de abastecimiento, para períodos de espera de 1 y más largo. Finalmente, conocido el rendimiento de cada método, se propuso la utilización de una política dependiente del tiempo, para el tiempo de ejecución corto y un pedido fijo, para tiempos de espera más largo. En la figura N° 2 se presentan los resultados de cada método en términos de costo promedio por período para los diferentes plazos de entrega.

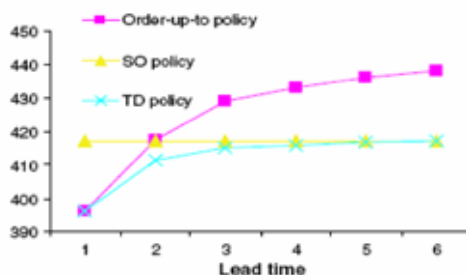


Figura N° 2: «Rendimiento de los métodos heurísticos propuestos por Lee, Lee & Bao».<sup>25</sup>

Otro método para problemas de gestión de inventarios, fue la aproximación matemática publicada por Prekopa<sup>26</sup> el año 2006. En su documento, muestra cómo una combinación del método húngaro, podría representar una buena opción para un problema de GI. Aquí, para minimizar un stock de seguridad que garantice una producción continua, se desarrolló un modelo estocástico de dos etapas de PD con



restricciones de seguridad y un inventario de múltiples elementos.

En otro enfoque, pero sin duda muy interesante, Haijema, van der Wal & van Dijk<sup>27</sup> es el que se enfrenta con un gran inventario perecible y, en el cual, se trató de minimizar la escasez y la pérdida de dicho inventario. Hasta este punto parece un problema normal de GI, pero en este caso estamos hablando de un elemento vital y rara vez producido: la sangre. Este elemento tiene un tiempo de vida de entre 5-7 días y de acuerdo con la edad de los donantes, es útil para diferentes propósitos. La sangre de donante joven, se prefiere para pacientes de oncología y hematología, que no son capaces de producir plaquetas por sí mismos. La sangre más antigua se utiliza para traumatología y cirugía general. Aunque existen transfusiones y cirugías programadas, más del 50% de la demanda semanal es incierto, y por supuesto se divide en diferentes tipos de sangre o grupos, y se demanda por separado para fines de sangre joven o vieja. En consecuencia, la demanda tiene una porción fija y una variable. En términos de costos, sin considerar los costos de “producción”, el estudio incluye los costos de almacenamiento, el costo de vencimiento, que implica la pérdida de sangre donada por voluntarios, y el costo de la escasez, que incluye el costo adicional de la adquisición de la sangre de otro banco de sangre. Desde la perspectiva del proveedor, esta es voluntaria y reside en la predisposición del donante. Debido a esto, se ha hecho un gran esfuerzo para protegerlos de infecciones y enfermedades externas y generar una “gestión de los donantes” con programas para incentivar y mantener el nivel de los donantes. Entonces, su formulación de PD incluye, entre otros, los siguientes aspectos:<sup>28</sup>

1. La periodicidad, debido a la demanda y la producción de la sangre de diversas características para los diferentes días de la semana.
2. Dos tipos de demandas: la demanda de plaquetas (sangre joven) y la demanda de sangre vieja.
3. Normas de abastecimiento alternativo para los dos tipos de demanda.
4. Retraso de abastecimiento de 1 día.

Ellos desarrollaron una PD Markoviana y la implementaron en una simulación, para obtener los resultados. Para evaluar el rendimiento y la sensibilidad de su modelo y presentar los resultados obtenidos, utilizaron datos numéricos reales de un banco de sangre.

Por otra parte, hoy en día cuando la conciencia con respecto a los recursos naturales es un tema diario, Luo, Maqsood y Huang<sup>29</sup> proponen el uso de estas técnicas para controlar un inventario diverso, como podría ser un recurso hídrico. Ellos presentan un híbrido entre una PD estocástica y programación por intervalo. El modelo presentado puede hacer frente a problemas de planificación basados en recursos naturales con características dinámicas, incertidumbre de datos y definiciones multietapas.<sup>30</sup> Para lo anterior, también presentaron una aplicación que, con el uso de valores numéricos, permite la obtención de datos de salida, los que se analizaron y evaluaron exhaustivamente.

Para problemas generales de GI, Zipkin<sup>31</sup> presentó un modelo general que considera un tiempo discreto, demanda estocástica, plazo de entrega constante y con pérdida de ventas, cuando no existe inventario disponible. Para lo anterior, utilizando valores numéricos, analizó y evaluó el desempeño





de diferentes métodos heurísticos para solucionar este tipo de problemas.

Otro problema común que se enfrenta en GI, se presenta cuando los datos actuales del inventario no son exactos o se observan parcialmente. Este tipo de situaciones podría presentarse debido a una mala observación del inventario, porque la información se actualiza con cierto retraso, porque algunos elementos estaban fuera de lugar o, simplemente, fueron robados, porque algunos de ellos se deterioraron durante el tiempo sin ser detectado o porque la cantidad recibida por el proveedor fue asumida correcta y no fue exacta. Este tipo de problemas fueron considerados por Bensoussan, Cakanyildirim, Minjarez-Sosa, Sethi y Shi,<sup>32</sup> paper en el que, aparte de la observación parcial del inventario, no pierde ventas por falta de inventario, permitiendo la reserva de inventario de un período al siguiente. Ellos presentan la formulación de PD y proporcionan un enfoque matemático para su resolución. También proponen un método de aproximación mediante el establecimiento de finitud a ciertos parámetros y reducir, en consecuencia, la región factible. El reto aquí es encontrar una familia finita adecuada de funciones para representar la distribución condicional del nivel de inventario.<sup>33</sup>

Por otra parte, cuando un distribuidor tiene diferentes productos con precios y costos variados, el problema en consecuencia tiene bastante variabilidad. Si este problema de GI posee un número finito de elementos, una demanda y una preferencia del cliente de tipo estocástico, una buena aproximación fue presentada por Honhon, Gaur y Seshadri.<sup>34</sup> Ellos partieron modelando la demanda de cada producto y como la preferencia por los diferentes productos era estocástica, identificaron los diferentes tipos de clientes

y de acuerdo a cada tipo, obtuvieron una distribución de probabilidades representativa para cada producto. Cada uno de los tipos es una proporción fija de la demanda total del distribuidor. Como es esperable, el objetivo del distribuidor es maximizar las utilidades, pero para un período único. El problema que enfrentaron fue que la función de rentabilidad entregaba múltiples óptimos locales, pero ellos fueron capaces de encontrar entre ellos el óptimo único. Para resolver el problema de PD utilizaron un algoritmo pseudo-polinomial complejo. Para lo anterior, presentan en su documento un ejemplo numérico detallado con las tablas de rendimiento de las diferentes heurísticas utilizadas en las distintas situaciones, presentando entre otros, la cantidad de inventario, el tiempo de cálculo utilizado y la rentabilidad esperada.

Un caso particular de la presentada previamente por Bensoussan, Cakanyildirim, Minjarez-Sosa, Sethi y Shi,<sup>35</sup> fue presentado por Bensoussan, Cakanyildirim, Feng y Sethi<sup>36</sup> al referirse al caso en que la información relativa al inventario, es obtenida con cierto retraso por el tomador de decisiones. En estos casos, el gestor debe decidir sobre la base de un nivel de inventario de referencia, el cual corresponde a la última actualización que recibió del inventario. Este retraso podría explicarse por mal funcionamiento, por problemas en la gestión de datos o simplemente por problemas en la red. Esto ocurre normalmente cuando los sistemas de gestión de inventario antiguos, son actualizados y lo anterior, combinado con los nuevos sistemas de datos, generalmente produce problemas en el flujo normal de la información. Con el modelo propuesto, fueron capaces de evaluar el comportamiento de la rentabilidad en el tiempo, para diferentes datos de retraso. Con esto, se puede determinar el impacto económico que tendría la



incorporación de un nuevo sistema de datos y evaluar, si su inversión será menor que el retorno esperado. Este documento representa una herramienta útil para evaluar las futuras inversiones para mejorar la GI. Al igual que en los escritos anteriores, ellos presentan la formulación del problema de PD y lo resuelven para un horizonte de planificación finito.

Un enfoque diferente para dos tipos de clientes, fue presentado por Wang, Yan y Sethi.<sup>37</sup> Los dos tipos de clientes se diferencian en el tiempo que están dispuestos a esperar para que el elemento sea entregado. Este tiempo de espera es diferente para un cliente que necesita el producto inmediatamente y otro que puede esperar hasta el próximo período. El problema del proveedor es cómo se distribuye el inventario disponible, para abastecer a ambos clientes y cómo se gestiona la cartera de pedidos. Para hacer frente a este problema, se establecen algunas reglas de prioridad en relación a la satisfacción de las órdenes atrasadas, con la llegada de nuevo inventario a ser distribuido. Ellos establecieron que el primer pedido recibido es el primer pedido abastecido, considerando los pedidos pequeños primero y asegurar futuros pedidos pequeños, y con posterioridad los pedidos más grandes ya formulados. Así, en una primera instancia se obtiene la política de abastecimiento óptima para cada ciclo, y obtenido ese inventario óptimo inicial, evaluar el comportamiento del sistema con políticas de reserva de inventario.

Como se ha presentado anteriormente, al trabajo anterior, se le agregó por parte de Zhou, Katehakis, y Zhao<sup>38</sup> una nueva variable. Ellos consideraron, además, el caso en que los distribuidores ofrecen una cantidad sobre la cual no habrá costo de envío, para cada período en que dicha cantidad sin costo de

envío es superada. Esta situación se observa con frecuencia y representa una tentación para el comprador, en agrandar la cantidad ordenada para obtener este envío gratis. Pero el riesgo que representa, es que el costo del exceso podría significar un costo mayor que el dinero que se ahorra en el envío libre. Este problema, desde el punto de vista del cliente y para un solo elemento inventariado, es abordado en este artículo. Es así como, considerando una demanda aleatoria, una revisión de stock periódica, un solo producto, una progresión del costo dependiendo de la cantidad solicitada y un solo producto, es formulado el problema con PD estocástica y proporciona una política óptima de GI.

En la figura N° 3, un nuevo elemento es incorporado al sistema, se permite el transbordo entre dos destinos. Esta situación fue presentada por Olsson.<sup>39</sup> Con un solo elemento inventariado y con dos ubicaciones en paralelo (con transbordo lateral entre ellos), se formula la PD para determinar la política óptima para suministrar a ambas ubicaciones.

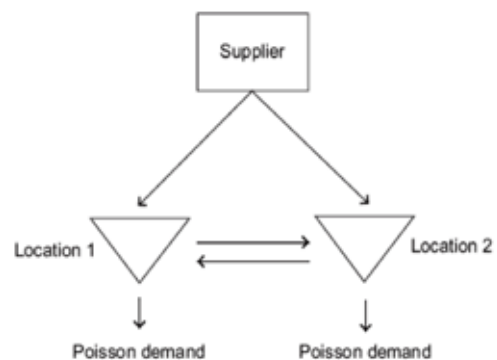


Figura N° 3: «La representación gráfica del sistema que permite transbordo lateral presentado por Olsson».<sup>40</sup>

Algunos de sus supuestos fueron una demanda de distribución Poisson para cada destino, un



tiempo de cero para el transbordo, un tiempo de espera exponencialmente distribuida, un sistema de inventario con un solo tipo de elemento, sin pedidos pendientes permitidos (a menos que el otro destino tenga el inventario disponible para ser transbordado) y como supuesto que una orden desde el abastecedor, llevará más tiempo que el transbordo. Basado en lo anterior, formuló el problema de PD estocástica, para obtener la política de abastecimiento óptima para las ubicaciones. Usando valores numéricos, evaluó el desempeño de la política de abastecimiento óptima obtenida para la GI, presentando todos los resultados obtenidos.

## Comentarios, conclusiones y referencias

Como puede establecerse en la lectura del texto, punto totalmente claro en todas ellas, es la limitación que enfrentan en la solución tradicional de problemas formulados con PD cuando se incluyen varias variables y estados. Por lo general, formulan la PD para una situación puntual basado en supuestos, para lograr una solución inicial. Para luego establecer una generalización del modelo obtenido para otras situaciones, pero la mayor parte de ellas debe finalmente ser resuelto por métodos heurísticos que permiten encontrar valores cercanos o aproximados del óptimo, o simplemente reducir el espacio de soluciones factibles del problema, es aquí donde el desarrollo de heurística, basado en el clásico método del ensayo-error, toma un rol relevante para permitir ajustar parámetros y variables, de modo de afinar los modelos a valores cercanos al óptimo.

Después de la formulación del problema a través de PD clásica, PD heurística o métodos

híbridos, normalmente utilizan datos numéricos reales para evaluar el desempeño de su modelo, validarlo y demostrar su utilidad para enfrentar la problemática para la que fueron diseñados.

Para este autor, esta investigación y repaso por la literatura técnica del tema, ha permitido visualizar los esfuerzos realizados a lo largo de los años por diversos autores, en pos de resolver algunos problemas cotidianos que para un ojo inexperto, parecen relativamente simples. También, permitió visualizar que un modelo sencillo y solucionable puede escalar a un problema complejo de solucionar con la matemática tradicional, con solo agregarle nuevas variables.

Mi personal reconocimiento a todos quienes han dedicado su vida al estudio en estas áreas de la optimización y que han permitido en conjunto, dar soluciones a problemas reales del mundo en que vivimos.

## Bibliografía

- 1 Dynamic Programming Notes, OA 131, Cranfield University, Introduction to Operational Research Techniques.
- 2 BELLMAN, R., "Eye of the Hurricane", p.159, cited in DREYFUS, S., "Richard Bellman on the Birth of Dynamic Programming", INFORMS, Vol. 50, N° 1, January-February 2002, p. 48.
- 3 WILSON, R.H., "A Scientific Routine for Stock Control", Harvard Business Review, 13, pp. 116-128.
- 4 BELLMAN, R., "Dynamic Programming", Princeton University Press, Princeton, 1957, p. 152.



- 5 Ibídem, p. 154.
- 6 SMITH, D. K., "Dynamic Programming: a practical introduction", Ellis Horwood Limited, England, 1991, p. 55.
- 7 BELLMAN, "Dynamic Programming", op. cit., p. 159.
- 8 WAGNER, H.M. & WHITIN, T.M., "Dynamic Version of the Economic Lot Size Model", Institute of Management Sciences, October 1958, Volume 5, Number 1, pp. 89-96.
- 9 VEINOTT, A. & WAGNER, H.M., "Computing Optimal (s, S) policies", Management Science, 11, 1965, pp. 525-552.
- 10 IGLEHART, D., "Dynamic Programming and Stationary Analysis of Inventory Problems", 1963, pp. 1-31, cited in BEYER, D. & SETHI, S. P., "The classical average-cost inventory models of Iglehart and Veinott-Wagner revisited", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 101, N° 3, 1999, pp. 523-555.
- 11 HOWARD, R.A., "Dynamic Programming and Markov Processes", Cambridge, The MIT Press, 1960.
- 12 GIRLICH, H.J. & CHIKAN, A., "The Origin of Dynamic Inventory Modeling Under Uncertainty (the men, their work and connection with the Stanford Studies)", Int. J. Production Economics 71, 2001, pp. 351-363.
- 13 VAN ROY, B., BERTSEKAS, D.P., LEE, Y. & TSITSIKLIS, J.N., "A Neuro-Dynamic Programming Approach to Retailer Inventory Management", In Proceedings of the IEEE Transactions on Automatic Control, 1997.
- 14 Ibídem, p. 2.
- 15 Ibídem, p. 6.
- 16 Ibídem, p. 9.
- 17 BUCHANAN, D. J. & ABAD, P. L., "Optimal policy for a periodic review returnable inventory system", IIE Transactions 30, 1998, pp. 1049-1055.
- 18 KLEYWEGT, A. J., NORI, V. S. & SAVELSBERGH, M. W. P., "Dynamic Programming Approximations for a Stochastic Inventory Routing Problem", Transportation Science, Volume 38, Issue 1, 2004, pp. 42-70.
- 19 NAIR, S.K. & ANDERSON, R.G., "Specialized Inventory Problem in Banks: Optimizing Retail Sweeps", Federal Reserve Bank of St. Louis, Working Paper N° 2005-023A, 2005, Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=763685>.
- 20 Ibídem, p. 3.
- 21 ABO-SINNA, M.A., "Multiple objective (fuzzy) dynamic programming problems: a survey and some applications", Applied Mathematics and Computation 157, 2004, pp. 861-888.
- 22 GEETHARAMANI, G, THANGAVEL, K., KARNAN. M. & ELANGO, C., "Fuzzy Dynamic Programming Model for Perishable Inventory Control System", ACSE Journal, Volume 6, Issue 3, 2006, pp. 9-14.



- 23 CHEN, Y., RAY, S. AND SONG, Y., "Optimal Pricing and Inventory Control Policy in Periodic-Review Systems with Fixed Ordering Cost and Lost Sales", *Naval Research Logistics*, Vol. 53, 2006, pp. 117-136.
- 24 LEE, L.H., LEE C. & BAO, J., "Inventory Control in the Presence of an Electronic Marketplace", *European Journal of Operational Research* 174, 2006, pp. 797-815.
- 25 *Ibidem*, p. 808.
- 26 PREKOPA, A., "On the Hungarian Inventory Control Model", *European Journal of Operational Research* 171, 2006, pp. 894-914.
- 27 HAIJEMA, R., VAN DER WAL, J & VAN DIJK, N.M., "Blood Platelet Production: Optimization by Dynamic Programming and Simulation", *Computers & Operations Research* 34, 2007, pp. 760-779.
- 28 *Ibidem*, p. 762.
- 29 LUO, B., MAQSOOD, I. & HUANG, G.H., "Planning Water Resources Systems with Interval Stochastic Dynamic Programming", *Water Resour Manage*, 2007, pp. 997-1014.
- 30 *Ibidem*, p. 1012.
- 31 ZIPKIN, P., "Old and New Methods for Lost-Sales Inventory Systems", *Operations Research* 56(5), 2008, pp. 1256-1263.
- 32 BENSOUSSAN, A., CAKANYILDIRIM, M., MINJAREZ-SOSA, J.A., SETHI, S.P. & SHI, R., "Partially Observed Inventory Systems: The Case of Rain Checks", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Forthcoming. Available at <http://ssrn.com/abstract=1087812>.
- 33 *Ibidem*, p. 16.
- 34 HONHON, D., GAUR, V. & SESHADRI, S., "Assortment Planning and Inventory Decisions under Stock-Out Based Substitution", *Johnson School Research Paper Series No. 01-09, McCombs Research Paper Series N° IROM-07-09*. 2008. Available at <http://ssrn.com/abstract=1271270>.
- 35 BENSOUSSAN, *loc. cit.*
- 36 BENSOUSSAN, A., CAKANYILDIRIM, M., FENG, Q. & SETHI, S.P., "Optimal Ordering Policies for Stochastic Inventory Problems with Observed Information Delays", 2008, *Production and Operations Management*, Forthcoming. Available at <http://ssrn.com/abstract=1098458>.
- 37 WANG, H., YAN, H. & SETHI, S., "Inventory Models with Alternative Delivery Lead Times, Demand Backlogging, and Priority Rules", 2009. Available at <http://ssrn.com/abstract=1338914>.
- 38 ZHOU B., KATEHAKIS M.N., & ZHAO, Y., "Managing Stochastic Inventory Systems with Free Shipping Option", *European Journal of Operational Research* 196, 2009, pp. 186-197.
- 39 OLSSON, F., "Optimal Policies for Inventory Systems with Lateral Transhipments", *Int. J. Production Economics* 118, 2009, pp. 175-184.
- 40 *Ibidem*, p. 176.